

第 2 回二次関数

テーマ[複雑な計算の取り扱い]

解説問題

二次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の解が α, β で $\alpha > \beta$ とする。

(1) α と β を求めよ。

(2) 不等式 $m < \alpha < m + 1$ と不等式 $n < \beta < n + 1$ を満たす整数 m, n を求めよ。

(3) $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ を求めよ。

(4) $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ を求めよ。

(センター試験 2006 年改題)

※以下、試験問題になります。

試験問題

[1]センター試験 2006 年第一問[1]

[1] 2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の解が α, β で、 $\alpha > \beta$ とするとき、

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{2}, \quad \beta = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{2}$$

である。また、 $m < \alpha < m + 1$ を満たす整数 m の値は $m = \boxed{\text{エ}}$ 、 $n < \beta < n + 1$ を満たす整数 n の値は $n = \boxed{\text{オカ}}$ である。

次に、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$ であり、 $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \boxed{\text{ケコ}} \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

[2]センター試験 2010 年第一問[1]

[1] $\alpha = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ とする。 α の分母を有理化すると $\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる

2 次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は $x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ 、 $\boxed{\text{キ}}$ である。

次の①～④の数のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

① $\frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$

② $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}$

③ $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

④ $\boxed{\text{キ}}$

[3]センター試験 2011 年第一問[1]

[1] $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}, \quad \frac{1}{b} = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき、不等式 $|2abx - a^2| < b^2$ を満たす x の値の範囲は、

$$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

[4]センター試験 2013 年第一問[1]

[1] $A = \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$, $B = \frac{1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ とする。このとき

$$AB = \frac{1}{(1 + \sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{6} - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり、また、 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$ である。以上により

$$A + B = \frac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

[補題] 余裕があればやってみてください

センター試験 2009 年第一問[1]

[1] 整式 $A = 6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20$ を因数分解すると

$$A = (\boxed{\text{ア}} x + y + \boxed{\text{イ}}) (\boxed{\text{ウ}} x + y - \boxed{\text{エ}})$$

となる。

$x = -1$, $y = \frac{2}{3 - \sqrt{7}}$ のとき, A の値は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。